## La forza di massa aggiunta nei moti irrotazionali non stazionari

Consideriamo il solito cilindro fermo e investito da fluido a velocità $U_0$. Vista la non stazionarietà la pressione va ricavata considerando anche la derivata di $\phi$ rispetto a $t$;

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t} = cost \Rightarrow p - p_0 = \rho \frac{U_0^2}{2}\left[1 - \left(\frac{v_\theta}{U_0}\right)^2\right] - \rho\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

Le forze agenti sul cilindro differiscono per la presenza della differenza tra le derivate temporali delle due $\phi$. Esaminiamo la ripercussione di tale termine;

$$F_x = -\int_0^{2\pi} (p - p_0) \cdot \cos\theta \cdot r_0 \, d\theta = \rho r_0 \int_0^{2\pi} \cos\theta \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) d\theta$$

$$F_y = -\int_0^{2\pi} (p - p_0) \cdot sen\theta \cdot r_0 \, d\theta = \rho r_0 \int_0^{2\pi} sen\theta \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) d\theta$$

Notando che $\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 2 r_0 \dot{U}_0 \cos\theta$;

$$F_x = \rho r_0 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot 2 \cdot r_0 \cdot \dot{U}_0 \, d\theta = 2\dot{U}_0 \rho r_0^2 \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = 2 \rho \pi r_0^2 \dot{U}_0$$

$$F_y = \rho r_0 \int_0^{2\pi} 2 r_0 \dot{U}_0 \, sen\theta \cos\theta \, d\theta = \rho r_0 \int_0^{2\pi} r_0 \dot{U}_0 \, sen(2\theta) \, d\theta = 0$$

La componente diversa da zero $F_x$ è detta forza di massa aggiunta ed è indicata con $F_M$. In generale si può scrivere:

$$F_M = C_M \cdot \rho \cdot V \cdot \dot{U}_0$$

Con $V$ volume del corpo per unità di lunghezza (per noi $\pi r_0^2$) e $C_M$ coefficiente di massa aggiunta (nel nostro caso pari a 2).

## L'equazione di Morison

Il teorema $\Pi$ consente di adimensionalizzare le grandezze coinvolte in un esperimento sfruttando una base e giungendo ad una radicale semplificazione della raccolta di dati e dell'interpretazione degli stessi. Tralasciando i passaggi intermedi, per la forza $F_x$ si ottiene:

$$\frac{F_x}{\rho \frac{U_0^2}{2} \cdot \frac{D^2}{4}\pi} = C_0\left(\frac{U_0 D}{\nu}\right) = C_D(Re), \text{ in generale } F_x = C_D(Re) \cdot \rho \frac{U_0^2}{2} A$$

Con $A$ area maestra esposta al fluido. Analogamente si ha $F_y = \rho \cdot \frac{U_0^2}{2} \cdot A \cdot C_L(Re)$

Mentre $C_D$ è coefficiente di resistenza, $C_L$ è coefficiente di portanza.

Se c'è dipendenza dal tempo compare la forza di massa aggiunta e si ottiene l'equazione di Morison:

$$F_x = C_D(Re, K_C) \frac{\rho U_0 \cdot |U_0|}{2} A + C_M(Re, K_C) \cdot \rho \dot{U}_0 V$$

In cui $C_D$ e $C_M$ dipendono anche da $K_C = \frac{\hat{U}_0 \cdot T}{L}$, coefficiente di Keulegan-Carpenter con $\hat{U}_0$ ampiezza delle oscillazioni della velocità e $T$ periodo delle stesse. Solitamente per moto oscillante si usa $\hat{U}_0$ anche per $Re$.